

Complexity in the presence of boundaries

Candidate: Paolo Braccia¹

Supervisor: Prof. Aldo Lorenzo Cotrone²

Supervisor: Dott. Erik Tonni³

Abstract

In quantum computation, state complexity is a measure of the hardness of producing a desired target state from a given reference state. It can be evaluated as the optimal number of elementary operations (gates) needed to build a unitary transformation (circuit) from the former to the latter. Optimality here depends on the cost we associate to the particular gates we can use.

“Holography”, one of the main techniques in modern theoretical physics, refers to a class of dualities relating certain quantum field theories (QFT) to gravitational (string) theories.

Recently, motivated by holographic insights, there has been a growing interest in extending the definition of complexity from computational (qubit) systems to quantum field theory scenarios. Using a geometric approach it is possible to translate the problem of minimizing the number of gates in a given circuit to that of finding the shortest geodesic between the identity and the transformation associated to that circuit in the space of unitaries. The geometry which these geodesic correspond to is determined by a metric structure that goes by the name of cost function. Choosing the cost function coincides with giving the elementary gates particular weights. Since in continuous theories such as QFTs complexity is inherently diverging, the standard procedure is to adopt a lattice regularization. This way the theory translates to a quantum many body problem and unitaries become unitary matrices. Restricting to the particular class of gaussian quantum states it is possible to reduce the circuit space from the whole space of unitaries to a subgroup of its, exploiting group theory techniques to find formulas for complexity. For the case of ground state complexity in free theories, these formulas are given by summation over logarithms of normal modes’ frequencies.

Besides being an interesting problem by itself, the extension of complexity to QFTs is necessary if we want to understand the possible role it has in encoding properties of black holes’ interior. Indeed the evolution of complexity has been proposed to correspond, through holography, to the evolution of Einstein-Rosen bridges, the tunnels connecting the inside of distant black holes, in the dual theory. There are two main proposals for the calculation of holographic complexity, both of them corresponding to evaluating a geometrical object in the dual spacetime (B) of the quantum state at hand. Complexity equals Volume (CV) relates complexity to the volume of a particular hypersurface in B , whereas Complexity equals Action (CA) identifies it with the gravitational action evaluated on a precise patch, called the Wheeler-DeWitt (WDW) patch, of B .

To delve deeper into the details of this new entry in the holographic dictionary, in this thesis we studied the ground state complexity of theories with boundaries, both from the field theory side and the gravitational one. In the field theory side we considered a massless scalar field living on a segment, enforcing Dirichlet boundary conditions on the latter endpoints. This led to a modification of the theory’s normal modes, with respect to the boundary-less case, and most importantly to the absence of the zero mode. This allowed us to study the structure of complexity in the continuum limit of the lattice. From the gravitational side we employed a recent proposal to build up the geometric dual of a massless theory with boundaries. In such geometry, we studied the complexity’s structures arising from the holographic proposals CV & CA, comparing them to that of the field theory calculation and with known results for scenarios without boundaries.

The main outcome of our investigation is the presence of a subleading logarithmic divergence that shows up both in field theory and in the gravitational calculations, and that is lacking in both sides when boundaries are removed.

¹*paolo.braccia@stud.unifi.it*

²*cotrone@fi.infn.it*

³*erik.tonni@sissa.it*

Complessità in presenza di bordi

Candidato: Paolo Braccia¹

Relatore: Prof. Aldo Lorenzo Cotrone²

Relatore: Dott. Erik Tonni³

Riassunto

Nella teoria della computazione quantistica, la complessità di stato è una misura della difficoltà di produrre un determinato stato “target” a partire da uno stato di riferimento. Essa è definita come il numero ottimale di operazioni elementari (porte) necessarie a costruire una trasformazione unitaria (circuito) che porti l’ultimo nel primo. Quale sia il circuito ottimale dipende dal “costo” che associamo a ciascuna delle porte elementari a nostra disposizione.

“Olografia” è il nome col quale generalmente ci si riferisce a una classe di dualità che connettono certe teorie di campo quantistiche (QFT) a teorie gravitazionali (di stringa). Recentemente, in seguito a intuizioni olografiche, si è registrato un crescente interesse nell’estendere la definizione di complessità dai sistemi computazionali alle QFT. Usando un approccio geometrico è possibile tradurre il problema di minimizzare il numero di porte in un circuito quantistico in quello di trovare la geodetica di lunghezza minima che connette l’identità alla trasformazione associata a tale circuito nello spazio delle trasformazioni unitarie. La geometria in cui si ambientano queste geodetiche è determinata da una struttura metrica che prende il nome di funzione di costo. Scegliere quest’ultima corrisponde ad associare alle porte elementari specifici pesi. Dal momento che in teorie continue come le QFT la complessità di stato è intrinsecamente divergente, la procedura standard per trattarla è quella di adottare una regolarizzazione su reticolo. In tal modo la teoria si traduce in un sistema quantistico a molti corpi e i circuiti diventano matrici unitarie. Restringendosi a considerare la particolare classe degli stati gaussiani è possibile ridurre lo spazio dei circuiti a un sottospazio delle matrici unitarie, cosa che permette l’utilizzo di tecniche di teoria dei gruppi per trovare formule esplicite per la complessità. Nel caso della complessità del ground state di teorie libere queste formule sono date da sommatorie di logaritmi delle frequenze dei modi normali del sistema.

Oltre ad essere un problema interessante di per sé, l’estensione della complessità alle teorie di campo è necessaria se vogliamo comprendere il possibile ruolo che questa gioca nel codificare proprietà dell’interno dei buchi neri. Infatti, secondo una recente proposta, l’evoluzione temporale della complessità sarebbe collegata, attraverso l’olografia, all’analoga evoluzione dei ponti di Einstein-Rosen, i tunnel che connettono mondi distanti tra loro passando attraverso un buco nero, nella teoria gravitazionale duale. Ci sono due proposte principali per il calcolo della complessità olografica ed entrambe corrispondono a valutare oggetti geometrici nello spaziotempo duale (B) allo stato quantistico in esame. Complexity equals Volume (CV) associa la complessità al volume di una particolare ipersuperficie in B , mentre Complexity equals Action (CA) la identifica con l’azione gravitazionale valutata su una precisa regione, chiamata Wheeler-DeWitt (WDW) patch, di B .

Per approfondire i dettagli di questo nuovo ingresso del dizionario olografico, in questa tesi abbiamo studiato la complessità del ground state di teorie con bordi, sia dal lato di teoria di campo che da quello gravitazionale. In teoria di campo abbiamo considerato un campo scalare a massa nulla su un segmento, imponendo condizioni di Dirichlet agli estremi di quest’ultimo. Queste portano a una modifica dei modi normali della teoria rispetto al caso senza bordi, ma soprattutto all’assenza dello zero-modo. Ciò ci ha permesso di studiare la struttura della complessità nel limite al continuo del reticolo. Nel lato gravitazionale abbiamo dapprima impiegato una recente proposta per costruire lo spaziotempo duale a una teoria con bordi. In seguito in tale geometria abbiamo studiato la struttura della complessità emersa dal calcolo delle congetture olografiche CV e CA, paragonandola a quella ottenuta in teoria di campo e a risultati noti in letteratura per spazitempi senza bordi.

Il risultato principale della nostra analisi è la presenza di un termine divergente sottodominante che compare sia nei risultati di teoria di campo che in quelli gravitazionali, che è invece assente quando non sono presenti bordi.

¹ paolo.braccia@stud.unifi.it

² cotrone@fi.infn.it

³ erik.tonni@sissa.it