

Relatore: Domenico Seminara *seminara@fi.infn.it*

Candidato: Giacomo Cavini

Riassunto: Divergenze dell'entropia di entanglement in geometrie che violano l'hyperscaling

Nella tesi abbiamo studiato l'entropia di entanglement (EE) in ambito della corrispondenza AdS/CFT: una congettura proposta e sviluppata negli ultimi venti anni che afferma l'equivalenza tra una teoria di gravità in uno spazio-tempo con $d + 2$ dimensioni e una teoria di campo definita sul bordo della varietà. Le realizzazioni più studiate della congettura riguardano teorie invarianti di scala, ovvero l'equivalenza tra una teoria di gravità in una varietà asintoticamente Anti de Sitter (AdS) ed una teoria di campo conforme (CFT). Nel nostro lavoro, comunque, abbiamo considerato una geometria in cui l'elemento di linea trasforma in modo covariante sotto dilatazioni. In particolare la varietà dello spazio-tempo è definita da una famiglia di metriche parametrizzata da due parametri d_θ e ζ , denominate *hyperscaling violation geometries* (hvLif). La QFT duale è caratterizzata da un esponente critico dinamico ζ e da una violazione delle relazioni di hyperscaling, associata alla tendenza del sistema di comportarsi come una teoria in $d_\theta \neq d$ dimensioni spaziali. Ad esempio sistemi che presentano una superficie di Fermi sono descritti, a certe scale di energia, da una QFT in $2D$ ($d_\theta = 1$) indipendentemente dal reale numero di dimensioni del sistema. La corrispondenza AdS/CFT e le geometrie hvLif sono introdotte nella prima parte dell'elaborato. Il contenuto principale del lavoro di tesi è invece indirizzato a trovare una formula per l'entropia di entanglement rinormalizzata, relativa ad una regione A , in una QFT $(2 + 1)$ dimensionale con violazione dell'hyperscaling. Abbiamo lavorato dalla prospettiva della teoria gravitazionale in cui è possibile calcolare l'entropia di entanglement in configurazioni statiche tramite la prescrizione di Ryu e Takayanagi: l'EE è data dall'area $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_A}$ di una hypersuperficie di area minima \mathcal{E}_A , immersa in una sezione a tempo costante di hvLif₄ e vincolata dalla condizione al bordo che la curva $\partial\mathcal{E}_A$ coincida con l'*entangling curve* ∂A . Il bordo di \mathcal{E}_A appartiene al bordo dello spazio-tempo ($z = 0$ in un conveniente sistema di coordinate) e per la geometria che consideriamo questo implica che $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_A}$ sia infinita. Abbiamo regolarizzato $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_A}$ imponendo che $z \geq \varepsilon > 0$, dove ε in base al dizionario AdS/CFT corrisponde ad un cut-off UV nella QFT duale. In seguito alla regolarizzazione l'area di \mathcal{E}_A può essere espressa come un'espansione in ε , della forma $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_A} = P_A(\varepsilon) - \mathcal{F}_A + O(\varepsilon)$, dove P_A diverge per $\varepsilon \rightarrow 0$ e \mathcal{F}_A è l'area rinormalizzata. Allo scopo di trovare un'espressione per \mathcal{F}_A abbiamo studiato la struttura del termine P_A in hvLif₄, ottenendo che esso è composto da un numero di divergenze a potenza che dipende dal range di d_θ : una per $1 < d_\theta < 3$, due per $3 < d_\theta < 5 \dots$. L'espressione esplicita di P_A è stata trovata per $d_\theta < 7$, tramite un'analisi dettagliata della geometria della superficie \mathcal{E}_A in un intorno del bordo $z = 0$. Quello che abbiamo ottenuto è che P_A , o equivalentemente la divergenza UV dell'EE, dipende solamente dalla geometria della curva di entanglement ∂A (precisamente dalla sua lunghezza e curvatura geodetica), che abbiamo assunto essere liscia. I risultati principali del nostro lavoro sono due formule, una per $1 < d_\theta < 3$ e una per $3 < d_\theta < 5$, che esprimono \mathcal{F}_A in termini della curvatura estrinseca di \mathcal{E}_A . Le formule sono valide per configurazioni indipendenti dal tempo in varietà asintoticamente hvLif₄ e generalizzano il risultato ottenuto recentemente nell'ambito di AdS₄/CFT₃, ovvero per teorie invarianti di scala. AdS₄ è in effetti un caso particolare di hvLif₄ che si ottiene per $d_\theta = d$. Se consideriamo AdS₄ privo di materia l'espressione per \mathcal{F}_A assume una forma particolarmente semplice in termini della, ben nota in matematica, *Willmore energy* di una superficie chiusa immersa in \mathbb{R}^3 . Nel nostro caso abbiamo ottenuto per hvLif₄ una generalizzazione della Willmore energy. Abbiamo anche studiato alcune delle sue proprietà, ad esempio il suo comportamento sotto dilatazioni, e applicato la formula ad alcuni domini. Nel caso di una regione A della forma di una striscia infinita abbiamo verificato che il risultato ottenuto coincide con quello noto in letteratura, mentre per un dominio circolare abbiamo calcolato numericamente \mathcal{F}_A in funzione di d_θ . L'aspetto notevole di questa analisi è che nel caso di teorie che violano l'hyperscaling è possibile superare il limite inferiore di 2π su \mathcal{F}_A , che invece è rispettato per teorie conformi. Possibili sviluppi futuri sono considerati nella parte conclusiva del lavoro.

Relatore: Domenico Seminara *seminara@fi.infn.it*

Candidato: Giacomo Cavini

Riassunto: Divergences of the entanglement entropy in hyperscaling violating geometries

In this thesis we have studied the entanglement entropy in the context of the gauge/gravity correspondence: a conjecture proposed and developed in the last twenty years, which states the equivalence of a gravitational theory in a $(d+2)$ -dimensional spacetime and a QFT defined on its $(d+1)$ -dimensional boundary. The most studied realizations of the conjecture are scale invariant theories, namely gravity in an asymptotically AdS spacetime and a CFT on its boundary. However, in this work we consider a bulk geometry whose line element transforms covariantly under dilations. It consists in a two-parameters (d_θ and ζ) family of metrics, named the hyperscaling violation metrics (hvLif). The dual QFT is characterized by a dynamical critical exponent ζ and a violation of the hyperscaling relations associated to the propensity of the system to be described by a theory with an effective space dimension $d_\theta \neq d$. For instance systems with a Fermi surface, at a certain energy scale, are described by a QFT in $2D$ ($d_\theta = 1$) regardless the real number of dimensions. The gauge/gravity duality and the hyperscaling violation geometry are introduced in the first part of the thesis. The main content of this thesis is addressed to find a formula for the renormalized entanglement entropy of a region A in QFT with hyperscaling violation in $d = 2$. We worked from the perspective of the dual gravitational theory where the Ryu-Takayanagi proposal allows us to compute the entanglement entropy of static configurations as the area $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_A}$ of a minimal area hypersurface \mathcal{E}_A , embedded in a constant time slice of hvLif₄ with the boundary condition that $\partial\mathcal{E}_A$ coincides with the *entangling surface* ∂A . The boundary of \mathcal{E}_A lies on the boundary of the spacetime ($z = 0$ in a convenient system of coordinates) and for our geometry or the AdS space this implies that $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_A}$ is infinite. We regularized $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_A}$ by imposing $z \geq \varepsilon > 0$, with a small ε corresponding to an UV cut-off in the dual QFT according to the gauge/gravity dictionary. Then the area of \mathcal{E}_A can be expressed as an ε -expansion of the form $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_A} = P_A(\varepsilon) - \mathcal{F}_A + O(\varepsilon)$, where P_A is divergent as $\varepsilon \rightarrow 0$ and \mathcal{F}_A is the renormalized area. In order to find an expression for \mathcal{F}_A we studied the structure of P_A in hvLif₄ obtaining that it contains a number of power-like divergences which depends on the range of d_θ : one for $1 < d_\theta < 3$, two for $3 < d_\theta < 5 \dots$. We found the explicit expression of P_A for $d_\theta < 7$, by employing a detailed analysis of \mathcal{E}_A near the boundary at $z = 0$. We obtained that P_A , or equivalently the UV-divergent contribution to the entanglement entropy, depends only on the geometry of the entangling curve ∂A (i.e. on its length and geodesic curvature) that we assumed to be smooth. The main results of our work are a formula for \mathcal{F}_A in the case $1 < d_\theta < 3$ and one for $3 < d_\theta < 5$, which express the renormalized entanglement entropy in terms of the extrinsic curvature of \mathcal{E}_A . Our results are valid for time-independent configurations in asymptotically hvLif₄. These expressions for \mathcal{F}_A generalizes the analogous result obtained recently in the context of AdS₄/CFT₃, namely for scale invariant theories. In fact AdS₄ is a particular case of hvLif₄ obtained by setting $d_\theta = d$. When we consider pure AdS₄ the formula for \mathcal{F}_A gets a particularly simple form in terms of a well known geometrical object: the Willmore energy of a closed surface embedded in \mathbb{R}^3 . In the case of pure hvLif₄ we obtained a generalization of the Willmore energy. We also investigated some of its properties, such as its behaviour under dilations, and applied the formula to some highly symmetric domains. For a region A with the shape of an infinite strip we checked that it yields the result known in literature, while for the disk-like domain we computed \mathcal{F}_A as a function of d_θ by employing a numerical analysis. The interesting outcome for the disk is that in hyperscaling violating theories we can overcome the lower bound of 2π for \mathcal{F}_A , which holds in scale invariant theories. Possible developments are discussed in the last part of the thesis.

Questionario di valutazione del percorso formativo per laureandi

Leggi con attenzione le seguenti Istruzioni.

- Rispondi alle domande con molta attenzione.
- Quando hai finito di rispondere a tutte le domande:
 1. **premi il pulsante in fondo alla pagina "Invia tutto e termina"**
 2. **stampa la schermata successiva come attestato di compilazione del questionario e trasmettila al Presidente del tuo Corso di Studi via posta elettronica.**
- Adesso puoi iniziare la compilazione del questionario premendo il pulsante "Tenta il quiz adesso".

Tentativi permessi: 1

Riepilogo dei tuoi tentativi precedenti

Stato	Revisione
Completato Inviato lunedì, 12 febbraio 2018, 15:34	Non permesso

Non sono permessi altri tentativi